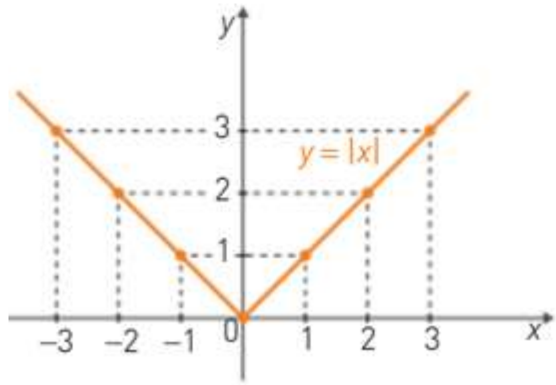
FICHA DE TRABALHO N.º 12 (Função Módulo)	**TURMAS:10.ºA/10.ºB**	**2019/2020**

Definição:

Dado $x \in IR$,designa-se por **módulo** (ou **valor absoluto**) de x o número real definido por:

$$|x| = \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$$

A função $f: IR \rightarrow IR$ definida por $f(x) = |x|$ designa-se por **função módulo** (ou **função valor absoluto**).



De um modo geral, dada uma função f, tem-se $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & se\ f(x) \geq 0 \\ -f(x) & se\ f(x) < 0 \end{cases}$

Exemplo:

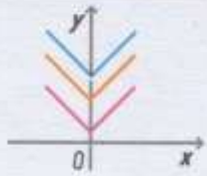
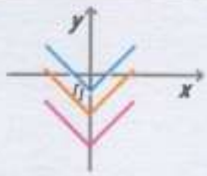
Seja $f(x) = 2|x-1| + 3$.

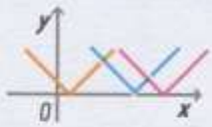
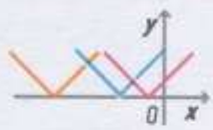
Sabemos que: $|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{se } x-1 \geqslant 0 \\ -(x-1) & \text{se } x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \geqslant 1 \\ -x+1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$

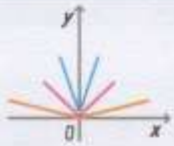
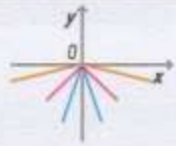
Então: $f(x) = \begin{cases} 2(x-1)+3 & \text{se } x \geqslant 1 \\ 2(-x+1)+3 & \text{se } x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } x \geqslant 1 \\ -2x+5 & \text{se } x < 1 \end{cases}$

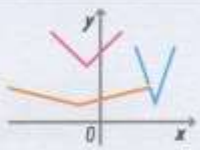
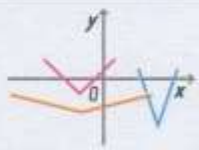
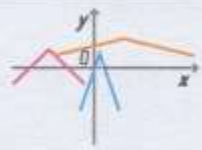
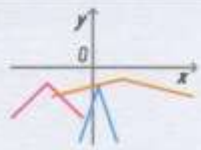
Exercício: Manual Novo Espaço, vol.2, página 82 (87)

Estudo das funções módulo do tipo: $y = a|x-b|+c \ \ (a,b,c \in IR, \ com \ a \neq 0)$

Funções do tipo $y = \lvert x \rvert + c$		
Características	**$c > 0$**	**$c < 0$**
Gráfico		
Contradomínio	$[c, +\infty[$	
Zeros	Não tem	c e $-c$
Sinal	Positiva em $\mathbb{R}$.	Negativa entre os zeros e positiva fora.
Extremos	Mínimo absoluto $= c$ para $x = 0$.	
Monotonia	Decrescente em $]-\infty, 0]$ e crescente em $[0, +\infty[$.	
Paridade	Par	
Eixo de simetria do gráfico	$x = 0$	
Vértice do gráfico	$(0, c)$	

Funções do tipo $y = \lvert x - b \rvert$		
Características	**$b > 0$**	**$b < 0$**
Gráfico		
Contradomínio	$[0, +\infty[$	
Zeros	b	
Sinal	Positiva em $\mathbb{R} \setminus \{b\}$.	
Extremos	Mínimo absoluto $= 0$ para $x = b$.	
Monotonia	Decrescente em $]-\infty, b]$ e crescente em $[b, +\infty[$.	
Paridade	Nem par nem ímpar.	
Eixo de simetria do gráfico	$x = b$	
Vértice do gráfico	$(b, 0)$	

Funções do tipo $y = a\|x\|$		
Características	$a > 0$	$a < 0$
Gráfico		
Contradomínio	$[0, +\infty[$	$]-\infty, 0]$
Zeros	0	
Sinal	Positiva em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.	Negativa em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Extremos	Mínimo absoluto $= 0$ para $x = 0$.	Máximo absoluto $= 0$ para $x = 0$.
Monotonia	Decrescente em $]-\infty, 0]$ e crescente em $[0, +\infty[$.	Crescente em $]-\infty, 0]$ e decrescente em $[0, +\infty[$.
Paridade	Par	
Eixo de simetria do gráfico	$x = 0$	
Vértice do gráfico	$(0, 0)$	

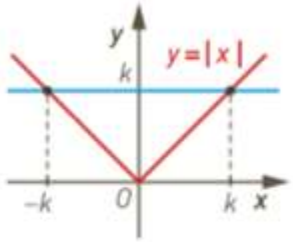
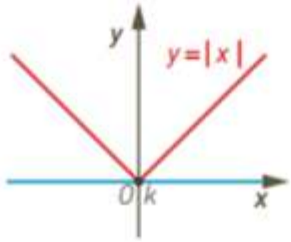
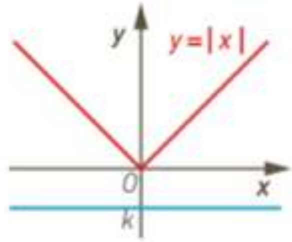
Funções do tipo $y = a\|x - b\| + c$				
Características	$a > 0$		$a < 0$	
	$c > 0$	$c < 0$	$c > 0$	$c < 0$
Gráfico				
Contradomínio	$[c, +\infty[$		$]-\infty, c]$	
Zeros	Não tem.	Tem dois.	Tem dois.	Não tem.
Sinal	Positiva em $\mathbb{R}$.	Negativa entre os zeros e positiva fora.	Positiva entre os zeros e negativa fora.	Negativa em $\mathbb{R}$.
Extremos	Mínimo absoluto $= c$ para $x = b$.		Máximo absoluto $= c$ para $x = b$.	
Monotonia	Decrescente em $]-\infty, b]$ e crescente em $[b, +\infty[$.		Crescente em $]-\infty, b]$ e decrescente em $[b, +\infty[$.	
Paridade	Nem par nem ímpar $(b \neq 0)$.			
Eixo de simetria do gráfico	$x = b$			
Vértice do gráfico	(b, c)			

Exercícios: Manual Novo Espaço, vol. 2, página 84 (93), página 85 (94 e 95) e página 104 (36)

Equações e inequações com módulos

Equações com módulos

Considere-se a equação $|x| = k$, $k \in \mathbb{R}$.

$\lvert x \rvert = k$, $k \in \mathbb{R}$		
Se $k > 0$	Se $k = 0$	Se $k < 0$
 A equação $\lvert x \rvert = k \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = k \vee x = -k$ ▪ A equação tem duas soluções.	 A equação $\lvert x \rvert = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ▪ A equação tem uma só solução.	 A equação $\lvert x \rvert = k$ é impossível. ▪ A equação não tem soluções.

Exercícios: Manual Novo Espaço, vol. 2, página 87 (98 e 99) e página 88 (100, 101 e 102)

Nota: Para resolver equações entre duas expressões com módulos, utiliza-se a seguinte propriedade: $|a|=|b| \Leftrightarrow a=b \vee a=-b$

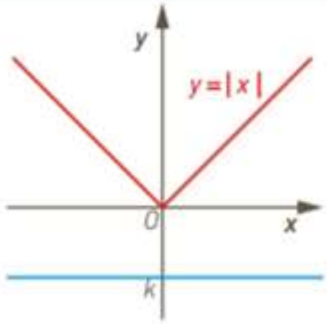
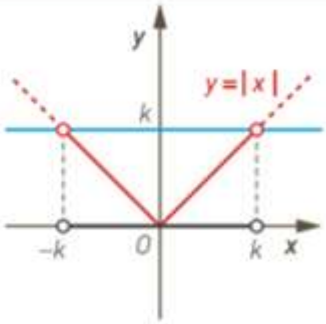
Outras propriedades dos módulos:

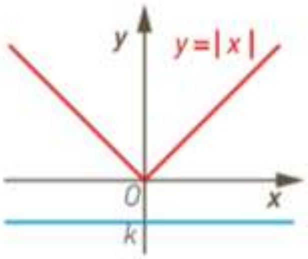
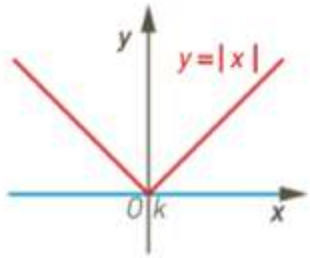
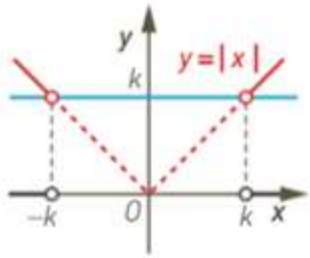
- $|xy| = |x| \times |y|$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, $y \neq 0$
- $|x^n| = |x|^n$, $n \in \mathbb{N}$
- $|x| > |y| \Leftrightarrow x^2 > y^2$
- $|x+y| \leqslant |x| + |y|$

Inequações com módulos

Considerem-se inequações dos tipos:

$$|x| < k\,,\ k \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad |x| > k\,,\ k \in \mathbb{R}$$

$\|x\| < k\,,\ k \in \mathbb{R}$	
Se $k \leqslant 0$	Se $k > 0$
	
$\|x\| < k$, condição impossível	$\|x\| < k \Leftrightarrow -k < x < k$ $\|x\| < k \Leftrightarrow x \in \,]-k\,,\ k[$

$\|x\| > k\,,\ k \in \mathbb{R}$		
Se $k < 0$	Se $k = 0$	Se $k > 0$
		
$\|x\| > k$, condição universal. Conjunto-solução: $\mathbb{R}$	$\|x\| > k \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\|x\| > k \Leftrightarrow x > k \vee x < -k$ $\Leftrightarrow x \in \,]-\infty\,,\ -k[\, \cup$ $\cup \,]k\,,\ +\infty[$

Exercícios: Manual Novo Espaço, vol. 2, página 89 (103 e 104) e página 90 (105, 106 e 107)

Nota: Para resolver inequações entre duas expressões com módulos, utiliza-se a seguinte propriedade: $a \le b \Leftrightarrow a^2 \le b^2 \quad ou \quad a \ge b \Leftrightarrow a^2 \ge b^2$

Problemas com a função módulo

1. Um sensor colocado num ponto do chão no eixo de uma pista retilínea incluída num circuito permite obter a distância d(t), em metros, a que se encontra desse ponto um atleta que corre sobre o eixo da pista, desde o instante em que entra na pista até ao fim da pista.
Seja $d(t) = |10 - 2t|$, com $t \in [0,15]$, dado em segundos.

a) Mostra que o sensor não está colocado à mesma distância do início e do fim da pista.

b) Determina o comprimento da pista e a velocidade média a que o atleta corre nessa pista.

c) Em que instantes a distância do atleta ao sensor é 5 metros?

d) Durante quanto tempo o atleta se encontra a uma distância do sensor superior a 6 metros?

2. Considera um reservatório, inicialmente cheio, com uma torneira na sua base que o esvazia durante algum tempo.
Essa torneira foi fechada e abriu-se uma outra torneira, localizada no cimo do reservatório, que o voltou a encher.
Seja h(t) a função que representa a altura da água no reservatório, em metros, em função do tempo t, em minutos.

$$h(t) = \frac{1}{5}|t - 15| + 1$$

a) Qual é a altura do reservatório?

b) Durante quanto tempo esteve o reservatório a esvaziar?

c) Ao fim de quanto tempo o reservatório voltou a ficar cheio?

d) Durante quanto tempo a altura de água no reservatório foi superior ou igual a 2 metros?

e) Representa graficamente a função h(t), no contexto do problema.