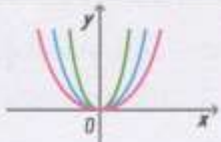
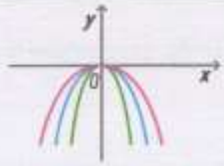
FICHA DE TRABALHO N.º 10 (Função Quadrática)	TURMAS:10.ºA/10.ºB	2019/2020

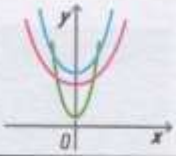
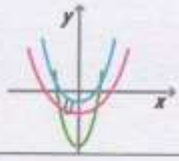
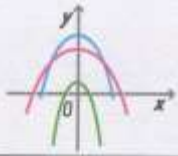
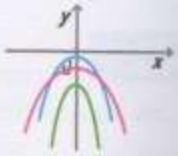
Definição:

Chama-se **função quadrática** a toda a função de domínio IR tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in IR, com\, a \neq 0$

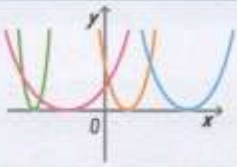
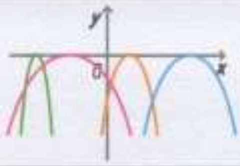
A expressão da função quadrática também pode ser do tipo: $f(x) = a(x-h)^2 + k$, $a, h, k \in IR, com\ a \neq 0$

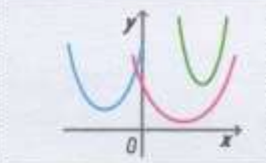
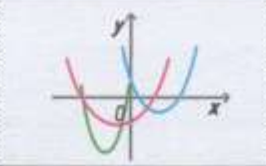
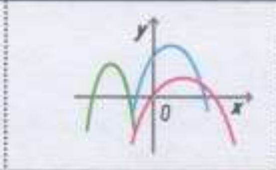
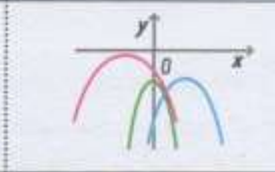
Propriedades analíticas e gráficas das funções quadráticas

Funções do tipo $y = ax^2$		
Características	$a > 0$	$a < 0$
Gráfico		
Contradomínio	$[0, +\infty[$	$]-\infty, 0]$
Zeros	Tem um para $x = 0$.	
Sinal	Positiva em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.	Negativa em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Extremos	Mínimo absoluto $= 0$ para $x = 0$.	Máximo absoluto $= 0$ para $x = 0$.
Monotonia	Decrescente em $]-\infty, 0]$ e crescente em $[0, +\infty[$.	Crescente em $]-\infty, 0]$ e decrescente em $[0, +\infty[$.
Paridade	Par	
Eixo de simetria do gráfico	$x = 0$	
Vértice da parábola	$(0, 0)$	
Concavidade da parábola	Voltada para cima.	Voltada para baixo.

Funções do tipo $y = ax^2 + c$				
Características	$a > 0$		$a < 0$	
	$c > 0$	$c < 0$	$c > 0$	$c < 0$
Gráfico				
Contradomínio	$[c, +\infty[$		$]-\infty, c]$	
Zeros	Não tem.	Tem dois.	Tem dois.	Não tem.
Sinal	Positiva em $\mathbb{R}$.	Negativa entre os zeros e positiva fora.	Positiva entre os zeros e negativa fora.	Negativa em $\mathbb{R}$.
Extremos	Mínimo absoluto $= c$ para $x = 0$.		Máximo absoluto $= c$ para $x = 0$.	
Monotonia	Decrescente em $]-\infty, 0]$ e crescente em $[0, +\infty[$.		Crescente em $]-\infty, 0]$ e decrescente em $[0, +\infty[$.	
Paridade	Par			
Eixo de simetria do gráfico	$x = 0$			
Vértice da parábola	$(0, c)$			
Concavidade da parábola	Voltada para cima.		Voltada para baixo.	

Nota: Onde se lê c pode-se ler k.

Funções do tipo $y = a(x - h)^2$		
Características	$a > 0$	$a < 0$
Gráfico		
Contradomínio	$[0, +\infty[$	$]-\infty, 0]$
Zeros	Tem um para $x = h$.	
Sinal	Positiva em $\mathbb{R} \setminus \{h\}$.	Negativa em $\mathbb{R} \setminus \{h\}$.
Extremos	Mínimo absoluto $= 0$ para $x = h$.	Máximo absoluto $= 0$ para $x = h$.
Monotonia	Decrescente em $]-\infty, h]$ e crescente em $[h, +\infty[$.	Crescente em $]-\infty, h]$ e decrescente em $[h, +\infty[$.
Paridade	Nem par nem ímpar $(h \neq 0)$.	
Eixo de simetria do gráfico	$x = h$	
Vértice da parábola	$(h, 0)$	
Concavidade da parábola	Voltada para cima.	Voltada para baixo.

Funções do tipo $y = a(x-h)^2 + k$ ou $y = f(x) = ax^2 + bx + c$				
Características	$a > 0$		$a < 0$	
	$k > 0$	$k < 0$	$k > 0$	$k < 0$
Gráfico				
Contradomínio	$[k, +\infty[$		$]-\infty, k]$	
Zeros	Não tem.	Tem dois.	Tem dois.	Não tem.
Sinal	Positiva em $\mathbb{R}$.	Negativa entre os zeros e positiva fora.	Positiva entre os zeros e negativa fora.	Negativa em $\mathbb{R}$.
Extremos	Mínimo absoluto $= k$ para $x = h$.		Máximo absoluto $= k$ para $x = h$.	
Monotonia	Decrescente em $]-\infty, h]$ e crescente em $[h, +\infty[$.		Crescente em $]-\infty, h]$ e decrescente em $[h, +\infty[$.	
Paridade	Nem par nem ímpar $(h \neq 0)$.			
Eixo de simetria do gráfico	$x = h$			
Vértice da parábola	(h, k) ou $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$			
Concavidade da parábola	Voltada para cima.		Voltada para baixo.	

Exercícios

Manual Novo Espaço 10, volume 2, páginas 62 a 73 (exercícios 55 a 76)

<u>Inequações do 2.º grau</u>

A resolução de inequações do 2.º grau baseia-se no estudo do seu sinal.
Depois de colocar a expressão da função na forma canónica, estuda-se o sinal através de um esboço do gráfico, a partir do qual se obtém o conjunto solução.

Inequações quadráticas

	$\Delta > 0$ (há duas raízes distintas)	$\Delta = 0$ (há uma raiz dupla)	$\Delta < 0$ (não há raízes)
$a > 0$			
$a < 0$			

Nota: $\Delta = b^2 - 4ac$ é o binómio discriminante.

Exercícios

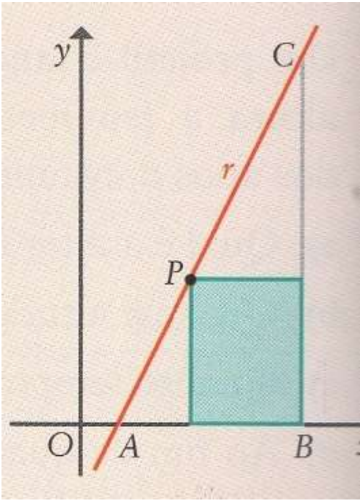
Manual Novo Espaço 10, volume 2, páginas 74 a 77 (exercícios 77; 79 a 82)

Resolução de problemas em contexto real (Modelação Matemática)

Exercícios
Manual Novo Espaço 10, volume 2, página 75 (exercício 78), página 77 (Tarefa 9)

Mais problemas …

Problema 1
Na figura está representada, em referencial o.n. xOy, a reta r, definida pela equação $y = 2x - 2$, A e B são os pontos de coordenadas (1, 0) e (6, 0), respetivamente, e C é o ponto da reta r de abcissa 6.
Considera que um ponto P se desloca ao longo do segmento de reta [AC], nunca coincidindo com o ponto A nem com o ponto C.
A cada posição do ponto P corresponde um retângulo de que uma das diagonais é o segmento [BP] e que tem um dos lados contido no eixo Ox. Seja x a abcissa do ponto P $\left(x \in \left]1,6\right[\right)$.



1.1. Mostra que a área do retângulo é dada, em função de x, por:

$$S(x) = -2x^2 + 14x - 12$$

1.2. Determina as dimensões do retângulo que tem maior área.

1.3. Determina o conjunto dos valores de x para os quais a área do retângulo é inferior a 8 (unidades de área).

Problema 2
Fez-se um estudo acerca da evolução do número de funcionários de uma empresa ao longo dos anos desde a sua inauguração em 1970, verificando-se que obedece ao seguinte modelo matemático: $N(t) = -\frac{t^2}{8} + \frac{9}{2}t + 72$, em que N(t) representa o número de funcionários e t o número de anos decorridos após a inauguração.

2.1. Com quantos funcionários a empresa iniciou a sua atividade?

2.2. Quantos funcionários tinha a empresa em 2002?

2.3. Uma reestruturação da empresa conduziu a uma diminuição gradual do número de funcionários. A partir de que ano é que isso aconteceu?

Problema 3

Num laboratório, foi colocado um purificador de ar.

Num determinado dia, o purificador foi ligado às zero horas e desligado algum tempo depois.

Ao longo desse dia, o nível de poluição do ar diminuiu, enquanto o purificador esteve ligado.

Uma vez desligado, o nível de poluição do ar começou de imediato a aumentar.

Admite que o nível de poluição do ar no laboratório, medido em mg/l de ar, às t horas desse dia, pode ser dado por: $P(t) = 0,002t^2 - 0,05t + 1$, $t \in [0, 24]$

3.1. Qual é o nível de poluição às duas horas e trinta minutos da tarde?

3.2. Quanto tempo esteve o purificador ligado? Apresenta o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

3.3. Para a realização de duas experiências A e B é exigido que o nível de poluição do ar seja inferior a 0,7 mg/l de ar.

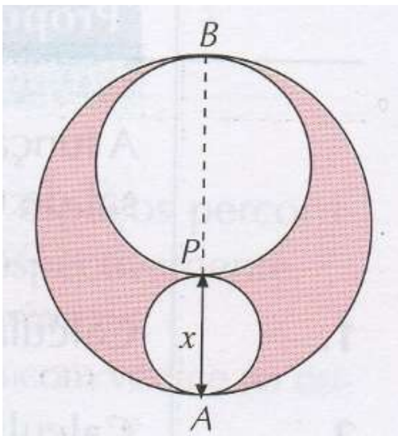
O tempo necessário à realização das experiências A e B é, respetivamente, seis horas e quatro horas e trinta minutos. É possível realizar estas experiências?

Utiliza a calculadora gráfica para investigar a questão. Numa pequena composição, explica as conclusões a que chegaste, justificando-as devidamente. Inclui, na tua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas de alguns pontos (coordenadas arredondadas às décimas).

Problema 4

Considera uma zona circular de diâmetro [AB] e tal que $\overline{AB} = 8m$. Dividindo [AB] em duas partes, pretende-se construir dois lagos circulares, de diâmetros [AP] e [PB], respetivamente, tal como mostra a figura, ficando a zona sombreada para relvado.

Considerando $\overline{AP} = x$ metros:



4.1. Mostra que a expressão que traduz a área da zona sombreada é dada, em função de x, por $A(x) = \frac{\pi}{2}(8x - x^2)$

4.2. Qual a área relvada, se um dos lagos tiver 1 metro de raio?

4.3. Determina o raio de cada um dos lagos de forma a tornar máxima a área para relvado.

Problema 5

Um fabricante de móveis vai lançar no mercado um novo modelo de cadeira para escritório.
Sabe-se que para vender x cadeiras o preço por cadeira, em euros, tem de ser 40-0,003x (quanto mais cadeiras vender, menor será o preço a cobrar por cada uma).

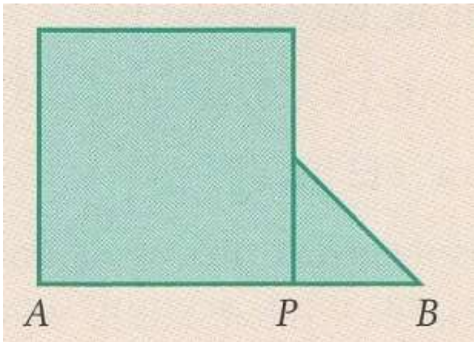
5.1. Justifica que a função que dá o preço final obtido na venda de x cadeiras é definida por: $p(x) = -0,003x^2 + 40x$, $x > 0$

5.2. Determina o preço final máximo obtido e o número de cadeiras que é necessário vender para o obter.

5.3. O fabricante sabe que o negócio só será lucrativo se o produto total obtido na venda não for inferior a 119250 euros. Determina o número de cadeiras que têm de ser vendidas para não haver prejuízo.

Problema 6

Considera que um ponto P se desloca num segmento de reta [AB] de comprimento 6, nunca coincidindo com A nem com B.
Para cada posição do ponto P, considera o quadrado de lado [AP] e o triângulo retângulo e isósceles de cateto [PB].



Seja $x = \overline{AP}$ e seja f(x) a soma das áreas do quadrado e do triângulo em função de x.

6.1. Calcula f(3).

6.2. Mostra que: $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 18$ e indica os valores que x pode tomar no contexto do problema.

6.3. Determina o valor de x para o qual a soma das áreas do quadrado e do triângulo é mínima.

6.4. Determina o conjunto dos valores de x para os quais f(x)$\geq$ 18