FICHA DE TRABALHO N.º 11	TURMA:12.ºA	2019/2020
No âmbito da articulação interdisciplinar – Matemática A, Biologia, Química e Economia C		

As funções exponenciais e logarítmicas na modelação de situações da vida real…

BIOLOGIA

1. Admite que t dias após as zero horas do dia 1 de janeiro de 2018, o número P, de bactérias, em milhares, existente numa determinada cultura de laboratório, é dado aproximadamente por: $P(t)=\frac{60}{3+13e^{-0,1t}}$, $t \geq 0$

1.1. Determina quantas bactérias, havia na cultura às 12 horas do dia 1 de fevereiro de 2018. Apresenta o resultado em milhares de bactérias, arredondado às décimas.

1.2. Determina em que dia do ano de 2018, o número de bactérias foi pela primeira vez superior a sete milhares.

1.3. Recorrendo às capacidades da calculadora, mostra que o aumento instantâneo máximo atingido pela cultura foi de 500 bactérias por dia. Explica o teu procedimento.

2. Admite que a biomassa C, em miligramas, de uma cultura bacteriana, t horas após o início da observação da cultura, é dada por $C(t)=\frac{600}{1+52e^{-0,4t}}$, $t \geq 0$

2.1. Determina o tempo necessário para que a cultura atinja 300 mg de massa.

2.2. Determina uma expressão C'(t) e aproveita o resultado para mostrar que a função C é estritamente crescente.

2.3. Mostra que o gráfico da função C tem uma assíntota horizontal e interpreta esse facto no contexto da situação descrita.

3. Considera que a capacidade pulmonar média de um ser humano com idade superior ou igual a 8 anos, é dada, em litros, em função da respetiva idade x, em anos, por:

$$C(x)=100\times\frac{-2+\ln(x)}{x} \qquad (x \geq 8)$$

3.1. Mostra que $C'(x)=\frac{300-100\ln(x)}{x^2}$

3.2. Sem recorrer à calculadora, a não ser para eventuais cálculos numéricos, determina em que idade a capacidade pulmonar média é máxima. Apresenta a resposta com arredondamento às unidades.

3.3. Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determina durante quantos anos é que o ser humano tem uma capacidade pulmonar média superior a 4 litros.
Apresenta o resultado com arredondamento às décimas.

QUIMÍCA

1. Admite que a temperatura, T, em graus centígrados, de um dado líquido, t minutos após um certo instante inicial, é dada por $T(t) = A + (T_0 - A)e^{-0,04t}$ $(t \geq 0)$, em que A é a temperatura ambiente, tomada como constante, e T_0 é a temperatura do líquido no instante inicial, ambas medidas em graus centígrados.

1.1. Determina quanto tempo demora o líquido a atingir a temperatura de 10ºC, no caso em que T_0 = 5ºC e A = 20ºC
Apresenta o resultado em minutos arredondados às unidades.

1.2. Mostra que $T'(t) = -0,04 \times (T_0 - A)e^{-0,04t}$ e estuda a monotonia da função T

1.2.1. … no caso em que $T_0 > A$

1.2.2. … no caso em que $T_0 < A$

1.3. Interpreta, no contexto do problema, e para cada um dos casos anteriores, as conclusões a que chegaste.

2. O lançamento de água residual num rio provoca uma diminuição gradual da quantidade de oxigénio dissolvido nesse rio. Essa diminuição ocorre até um determinado instante em que o rio começa a recuperar, altura em que a quantidade de oxigénio começa a aumentar, assim prosseguindo até atingir novamente o valor inicial.
Sabe-se que o lançamento de uma dada quantidade de certa água residual num dado rio provoca uma variação da quantidade de oxigénio dissolvido nesse rio que é dada por $O(t) = 6,2 + 22,25(e^{-0,42t} - e^{-0,26t})$, em que O é a quantidade em miligramas por litro (mg/l) de oxigénio dissolvido na água e t é o tempo, em dias, decorrido desde a descarga de água residual.

2.1. Determina a quantidade de oxigénio dissolvido no rio, no instante em que a descarga foi efetuada.

2.2. Determina quanto tempo demora o rio a iniciar a recuperação da quantidade de oxigénio dissolvido, desde o instante em que decorre a descarga. Apresenta o resultado em dias, arredondado às unidades.

2.3. Utiliza a calculadora para determinar durante quanto tempo é que a quantidade de oxigénio dissolvido no rio é inferior a 3 mg/l. Apresenta o resultado em dias e horas, com horas arredondadas às unidades.

2.4. Calcula $\lim_{t \to +\infty} O(t)$ e interpreta o resultado obtido, no contexto do problema, relacionando-o, inclusive, com o valor obtido na resposta ao item 2.1.

NEGÓCIOS/MARKETING

1. Um carro custa novo 40000 euros e desvaloriza 18% ao ano.

1.1. Caracteriza a função f que dá o valor do carro, t anos após ter sido comprado (apresenta a tua resposta na forma $f(t) = ae^{bt}$, sendo a e b números reais)

1.2. Após ter sido comprado, quanto tempo demora até que o carro valha metade do seu valor inicial? Apresenta o resultado em anos, aproximado às décimas.

1.3. Quanto desvaloriza, em percentagem, o carro, por mês?

2. Um fabricante de telemóveis planeia aumentar a sua produção mensal. Consultado o departamento de marketing, conclui-se que a relação preço-procura é bem modelada por $p(x) = 70 - e^{0,0002x}$ $(0 < x < 15000)$ onde x designa a procura mensal (número de telemóveis vendidos num mês) e p(x) designa o preço (em euros) de cada telemóvel.

2.1. Num certo mês foram vendidos oito mil telemóveis. A que preço foram vendidos? Apresenta o resultado em euros, arredondado às unidades.

2.2. No próximo mês, a empresa vai vender os telemóveis a 59 euros cada um. Quantos milhares de telemóveis, se espera vender?
Apresenta a tua resposta arredondada às unidades.

2.3. O custo de produção, em euros, é dado, em função do número x de telemóveis produzidos, por $C(x) = 500 + 30x$
Supondo que todos os telemóveis produzidos são vendidos, mostra que o lucro da empresa é dado, em função do número x de telemóveis produzidos, por $L(x) = 40x - xe^{0,0002x} - 500$

2.4. A derivada L', da função L, tem um, e um só, zero. Seja a esse zero.
Recorrendo ao Teorema de Bolzano, mostra que a está compreendido entre 12250 e 12260.

2.5. No domínio de L, sabe-se que $L'(x) > 0 \Leftrightarrow x < a$ e $L'(x) < 0 \Leftrightarrow x > a$.
Justifica que devem ser produzidos entre 12250 e 12260 telemóveis, de forma a obter o lucro máximo.

FIM