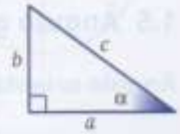
FICHA DE TRABALHO N.º 7 Trigonometria e Funções Trigonométricas	TURMA:12.ºA	2019/2020

1.1 Razões trigonométricas de um ângulo agudo

Em qualquer triângulo retângulo, sendo α a amplitude de um dos seus ângulos agudos, define-se:

$\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{b}{c}$ $\qquad \cos \alpha = \dfrac{a}{c}$ $\qquad \operatorname{tg} \alpha = \dfrac{b}{a}$



1.2 Relações entre as razões trigonométricas do mesmo ângulo

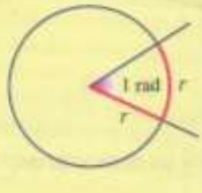
- $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ **Fórmula fundamental da trigonometria**
- $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$
- $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha}$, $\cos \alpha \neq 0$

1.3 Sistema sexagesimal e sistema circular

- Um grau é a nonagésima parte de um ângulo reto. O **sistema sexagesimal** é o sistema que toma como unidade de medida o grau.
- Um radiano (rad) é a amplitude do ângulo ao centro que corresponde a um arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência.

  O **sistema circular** é o sistema que toma como unidade de medida de ângulos o radiano.

  $1 \text{ rad} \approx 57{,}3°$

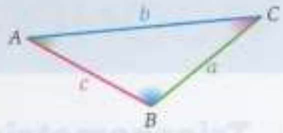


Conversão entre graus e radianos

Grau	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Radiano	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\pi}{2}$ rad	π rad	$\frac{3\pi}{2}$ rad	2π rad

1.4 Lei dos senos e lei dos cossenos

Num triângulo $[ABC]$ qualquer tem-se:



Lei dos senos

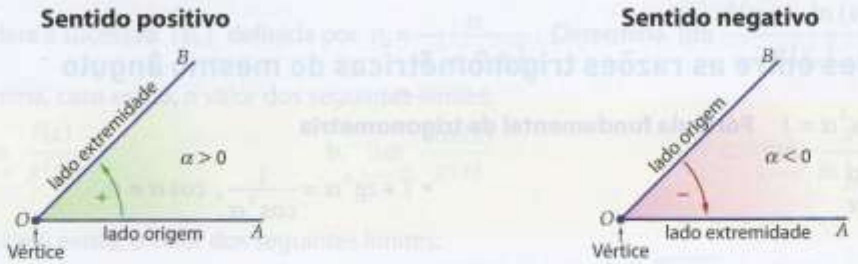
$$\frac{\text{sen } \hat{A}}{a} = \frac{\text{sen } \hat{B}}{b} = \frac{\text{sen } \hat{C}}{c}$$

Leis dos cossenos ou Teorema de Carnot

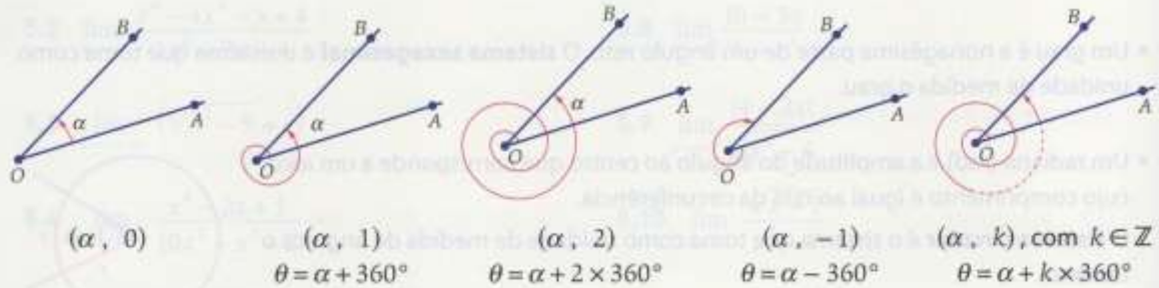
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

1.5 Ângulo generalizado

Ângulo orientado



Existem infinitas amplitudes de ângulos com os mesmos lados. Vejamos o exemplo:



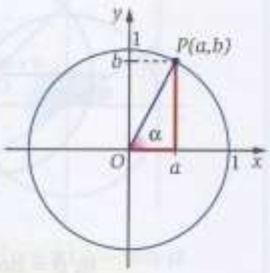
Um ângulo generalizado θ, pode representar-se por $\theta = (\alpha\ ,\ n)$, com $n \in \mathbb{Z}$, em que:

- α é um ângulo orientado, que admite como medida todos os valores pertencentes a $]-360°\ ,\ 360°[$, se estiver expresso em graus, ou a $]-2\pi\ ,\ 2\pi[$ no caso de estar expresso em radianos;
- $|n|$ é o número de voltas inteiras associadas ao ângulo orientado;
- n e α têm o mesmo sinal.

1.6 Circunferência trigonométrica

Considera a origem de um referencial cartesiano o. n., de raio igual à unidade – circunferência trigonométrica.
Imaginando um ponto P a percorrer a circunferência trigonométrica, o ângulo de amplitude α vai variando e facilmente se deduzem as suas razões trigonométricas:

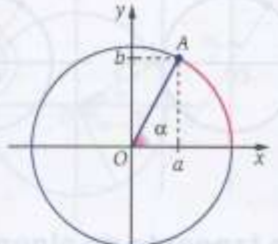
- $\cos\alpha = \dfrac{\text{abcissa de } P}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \dfrac{a}{1} \Leftrightarrow \cos\alpha = a$
- $\text{sen}\ \alpha = \dfrac{\text{ordenada de } P}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \text{sen}\ \alpha = \dfrac{b}{1} \Leftrightarrow \text{sen}\ \alpha = b$
- $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\text{ordenada de } P}{\text{abcissa de } P} \Leftrightarrow \text{tg}\ \alpha = \dfrac{b}{a}$



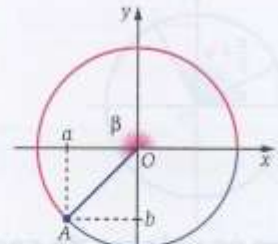
Seno e cosseno de um ângulo na circunferência trigonométrica

O seno de um ângulo é a ordenada do ponto de interseção do lado extremidade do ângulo com a circunferência trigonométrica.

O cosseno de um ângulo é a abcissa do ponto de interseção do lado extremidade do ângulo com a circunferência trigonométrica.



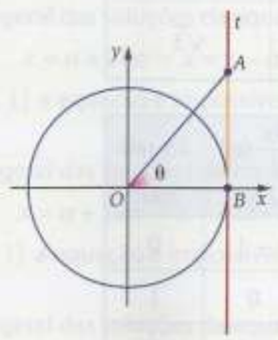
$\cos\alpha = a$ e $\text{sen}\ \alpha = b$



$\cos\beta = a$ e $\text{sen}\ \beta = b$

Tangente de um ângulo na circunferência trigonométrica

Considera a circunferência trigonométrica de centro O e um ângulo de amplitude θ pertencente ao intervalo $\left]0\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\right[$.

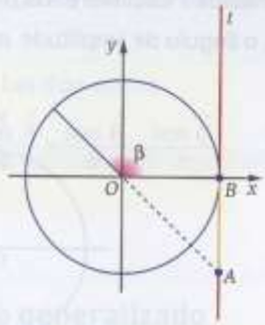


A tangente de θ é dada por:

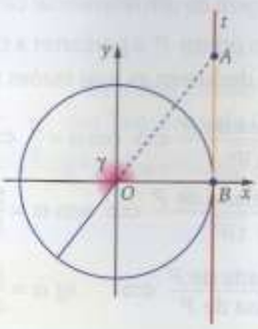
$$\text{tg}\ \theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\text{ordenada de } A}{1} = \text{ordenada de } A$$

À reta t chama-se eixo das tangentes.

Quando o ângulo não é agudo, a tangente é a ordenada do ponto de interseção do prolongamento do lado extremidade do ângulo com o eixo das tangentes:



tg β = ordenada de A

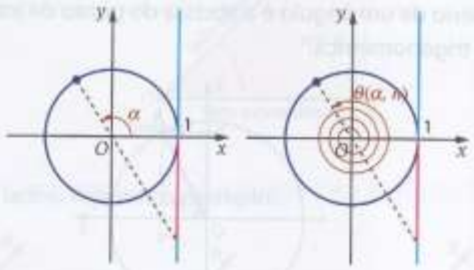


tg γ = ordenada de A

Repara que nos ângulos $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ o lado extremidade do ângulo é paralelo ao eixo das tangentes, pelo que não o interseta. Para estes ângulos a tangente não está definida.

De um modo geral, se $\theta = (\alpha\ ,\ n)$ tem-se:

- $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\theta$
- $\cos\alpha = \cos\theta$
- $\tan\alpha = \tan\theta$



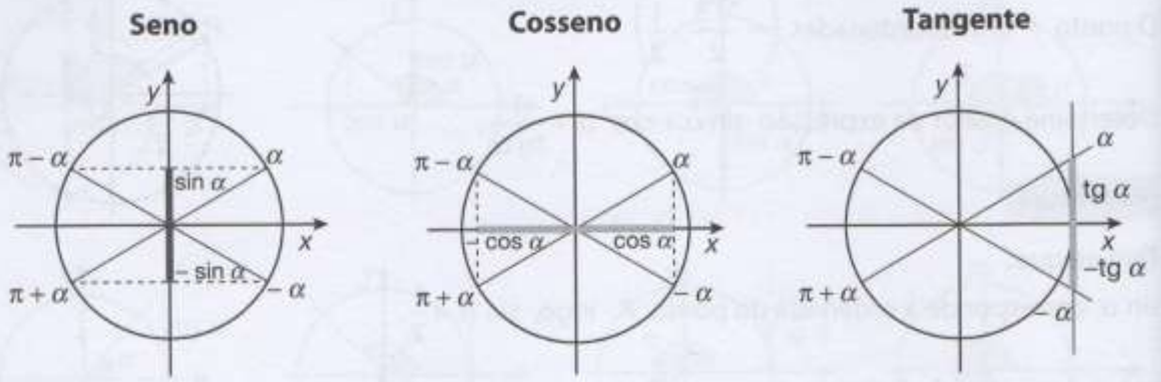
1.7 Tabelas com os valores do seno, cosseno e tangente de alguns ângulos

α	$\frac{\pi}{6}$ rad 30°	$\frac{\pi}{4}$ rad 45°	$\frac{\pi}{3}$ rad 60°
sen α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

α	0 rad 0°	$\frac{\pi}{2}$ rad 90°	π rad 180°	$\frac{3\pi}{2}$ rad 270°	2π rad 360°
sen α	0	1	0	− 1	0
cos α	1	0	− 1	0	1
tg α	0	n.d.	0	n.d.	0

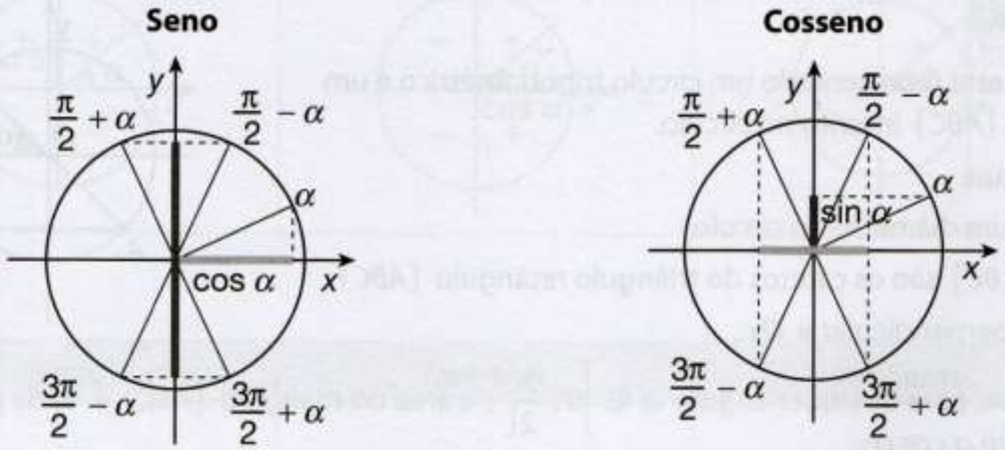
1.8. Redução ao primeiro quadrante

Relações entre as razões trigonométricas de α, $-\alpha$, $\pi-\alpha$ e $\pi+\alpha$



$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$	$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$	$\text{tg}(\pi-\alpha)=-\text{tg}\,\alpha$
$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$	$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$	$\text{tg}(\pi+\alpha)=\text{tg}\,\alpha$
$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$	$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$	$\text{tg}(-\alpha)=-\text{tg}\,\alpha$

Relações entre as razões trigonométricas de α, $\frac{\pi}{2}-\alpha$, $\frac{\pi}{2}+\alpha$, $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ e $\frac{3\pi}{2}+\alpha$



$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$
$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$
$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$

2.1 Equações trigonométricas

A expressão geral das soluções da equação $\operatorname{sen} x = b$, com $b \in [-1\,,\,1]$, é:

$$x = \alpha + 2k\pi \vee x = \pi - \alpha + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\,,\ \text{sendo } \alpha \text{ um ângulo cujo seno é } b\,.$$

Se $b \notin [-1\,,\,1]$ a equação é impossível.

A expressão geral das soluções da equação $\cos x = b$, com $b \in [-1\,,\,1]$, é:

$$x = \alpha + 2k\pi \vee x = -\alpha + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\,,\ \text{sendo } \alpha \text{ um ângulo cujo cosseno é } b\,.$$

Se $b \notin [-1\,,\,1]$ a equação é impossível.

A expressão geral das soluções da equação $\operatorname{tg} x = b$, com $b \in \mathbb{R}$, é:

$$x = \alpha + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\,,\ \text{sendo } \alpha \text{ um ângulo cuja tangente é } b\,.$$

FUNÇÃO PERIÓDICA

Seja f uma função real de variável real.

Diz-se que a função f é periódica de período T se e só se:

- $x \in D_f \Longleftrightarrow x + T \in D_f$
- $\forall x \in D_f,\ f(x+T) = f(x)$

Exemplo

Determine o período positivo mínimo da função f definida por $f(x) = 1 - \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Resolução

Seja T o período positivo mínimo da função f. Tem-se que $D_f = \mathbb{R}$; assim,

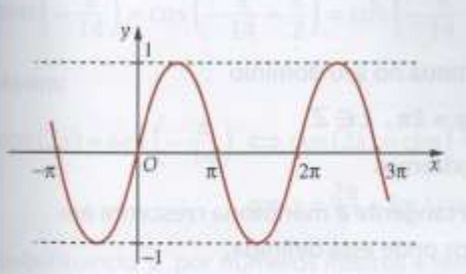
$$f(x+T) = f(x) \Longleftrightarrow 1 - \sin\left[3(x+T) - \frac{\pi}{4}\right] = 1 - \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \sin\left(3x + 3T - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \Longleftrightarrow 3T = 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow T = \frac{2k\pi}{3}\,,\ k \in \mathbb{Z}$$

Portanto, o período positivo mínimo da função f obtém-se fazendo $k = 1$, ou seja, é igual a $\frac{2\pi}{3}$.

2.2 Funções trigonométricas

Função seno



$y = \operatorname{sen} x$

Domínio: $\mathbb{R}$

Contradomínio: $[-1, 1]$

Continuidade: contínua em $\mathbb{R}$

Zeros: $\operatorname{sen} x = 0 \iff x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Extremos:

Máximo: 1 em $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

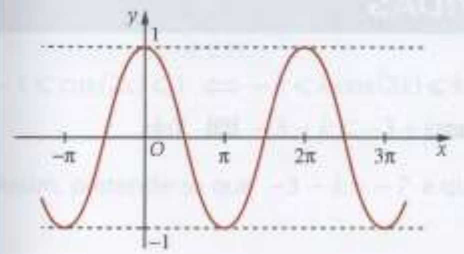
Mínimo: -1 em $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Monotonia: monótona crescente nos intervalos da forma $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right],\ k \in \mathbb{Z}$ e monótona decrescente nos intervalos da forma $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right],\ k \in \mathbb{Z}$

Paridade: é ímpar, pois $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x,\ \forall x \in \mathbb{R}$

Período positivo mínimo: 2π. O período positivo mínimo de uma função do tipo $y = a + b\operatorname{sen}(cx + d)$, com $a,\ d \in \mathbb{R}$ e $b,\ c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, é $\frac{2\pi}{|c|}$.

Função cosseno



$y = \cos x$

Domínio: $\mathbb{R}$

Contradomínio: $[-1, 1]$

Continuidade: é contínua em $\mathbb{R}$

Zeros: $\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Extremos:

Máximo: 1 em $x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

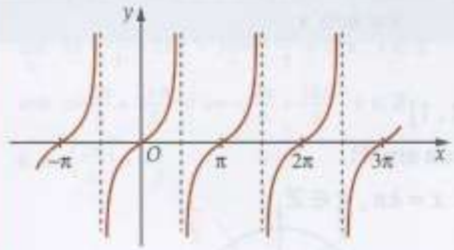
Mínimo: -1 em $x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Monotonia: monótona crescente nos intervalos da forma $[-\pi + 2k\pi, 2k\pi],\ k \in \mathbb{Z}$ e monótona decrescente nos intervalos da forma $[2k\pi, \pi + 2k\pi],\ k \in \mathbb{Z}$

Paridade: é par, pois $\cos(-x) = \cos x,\ \forall x \in \mathbb{R}$

Período positivo mínimo: 2π. O período positivo mínimo de uma função do tipo $y = a + b\cos(cx + d)$, com $a,\ d \in \mathbb{R}$ e $b,\ c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, é $\frac{2\pi}{|c|}$.

Função tangente



$y = \operatorname{tg} x$

Domínio: $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Contradomínio: $\mathbb{R}$

Continuidade: é contínua no seu domínio

Zeros: $\operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Extremos: não tem extremos

Monotonia: a função tangente é monótona crescente em cada um dos intervalos onde está definida.

Paridade: é ímpar, pois $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Período positivo mínimo: π. O período positivo mínimo de uma função do tipo $y = a + b\operatorname{tg}(cx + d)$, com a, $d \in \mathbb{R}$ e b, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, é $\frac{\pi}{|c|}$

Assíntotas verticais: as retas $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, são assíntotas verticais ao gráfico da função tangente

Limites nos ramos infinitos: não existe $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{tg} x$ nem $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{tg} x$

Exercícios de revisão:

1. Quantas soluções tem a equação $2 + 3\sin x = 1$ em $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$?

(A) Nenhuma (B) Uma (C) Duas (D) Três

2. Qual é o conjunto solução da equação $\cos(2x) = \sin\left(-\frac{\pi}{14}\right)$ em $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$?

(A) $\left\{\frac{2\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}\right\}$ (B) $\left\{-\frac{2\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}\right\}$

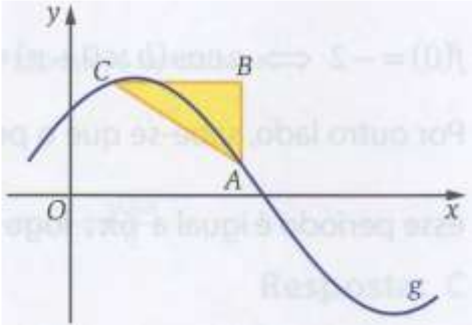
(C) $\left\{-\frac{2\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}\right\}$ (D) $\left\{-\frac{5\pi}{7}, -\frac{2\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}\right\}$

3. Considera a função *f*, de domínio IR, definida por $f(x) = -3 + k\cos(2x),\ com\ k \in IR^{+}$

Qual deve ser o valor de k de modo que o contradomínio da função *f* seja [-7, 1] ?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

4. Na figura estão representados, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função g, de domínio IR, definida por $g(x) = senx + \cos x$ e também o triângulo [ABC].



Sabe-se que:

. os pontos A e C pertencem ao gráfico da função g;

. o triângulo [ABC] é retângulo em B e o segmento de reta [BC] é paralelo ao eixo das abcissas;

. a abcissa do ponto A é $\frac{2\pi}{3}$ e a abcissa do ponto C é $\frac{\pi}{6}$.

Qual é o valor exato da área do triângulo [ABC] ?

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

5. Na figura está parte da representação gráfica da função f, definida por $f(x) = a\cos(bx + \pi)$, $com\ a, b \in IR^+$

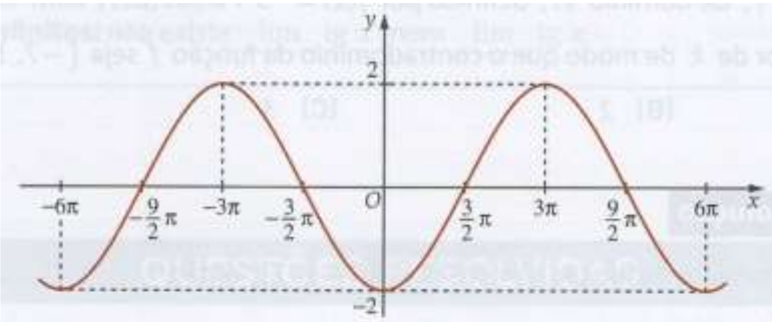
Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $a = -2\ e\ b = \frac{1}{3}$

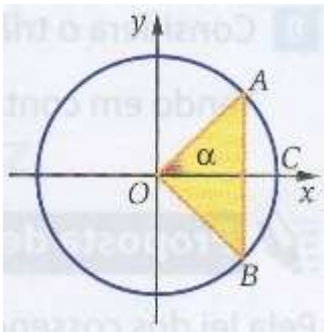
(B) $a = 2\ e\ b = \frac{1}{6}$

(C) $a = 2\ e\ b = \frac{1}{3}$

(D) $a = -2\ e\ b = \frac{1}{6}$



6. Na figura estão representados, em referencial o.n. xOy, a circunferência trigonométrica e um triângulo [AOB]. Os pontos A e B pertencem à circunferência. O segmento de reta [AB] é perpendicular ao semieixo positivo Ox. O ponto C é o ponto de interseção da circunferência com semieixo positivo Ox.



Seja α a amplitude do ângulo COA $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

Qual das expressões seguintes dá a área do triângulo [AOB] em função de α ?

(A) $\sin\alpha \times \cos\alpha$ (B) $\frac{tg\alpha \times \cos\alpha}{2}$

(C) $tg\alpha \times sen\alpha$ (D) $\frac{tg\alpha \times sen\alpha}{2}$

7. Resolve as seguintes equações:

7.1. $2-3tg^2(2x)=1$

7.2. $tgx = senx$

7.3. $2\cos^2 x + 3\cos x = -1$

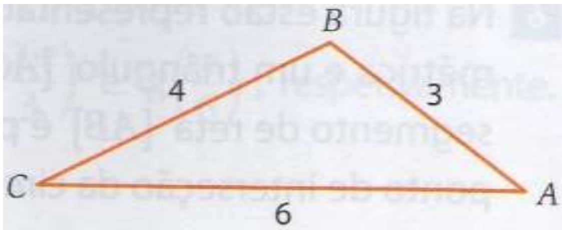
7.4. $\left|2\cos^2 x + 2\sin^2 x + \cos\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)\right| = 1$

8. Considera a função *f* de domínio IR, definida por $f(x)=1+3\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

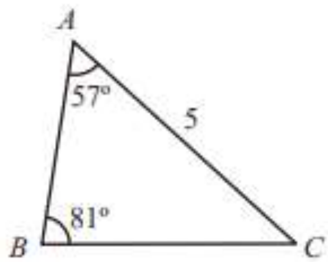
Mostra que o período positivo mínimo de *f* é $p=4\pi$

9. Considera o triângulo acutângulo [ABC]

Tendo em conta os dados da figura determina o valor de tgÂ.



10. Na figura, está representado um triângulo [ABC]



Sabe-se que:

. $\overline{AC}=5$
. $B\hat{A}C = 57^{\circ}$
. $A\hat{B}C = 81^{\circ}$

Qual é o valor de $\overline{AB}$, arredondado às centésimas?

(A) 3,31 (B) 3,35 (C) 3,39 (D) 3,43

Exame 2018 (2.ª Fase)

11. Considera a função f, definida em $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ por $f(x) = \cos x$

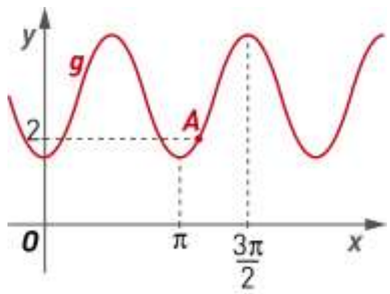
Qual dos seguintes conjuntos é o contradomínio da função f ?

(A) $\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ (B) $\left[\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$ (C) $\left[\frac{1}{2},1\right]$ (D) $\left[0,\frac{1}{2}\right]$

Exame 2018 (Época Especial)

12. Na figura está representada parte da função g, de domínio IR, definida por:

$$g(x) = 3 - \sqrt{2}\cos(2x)$$



12.1. Determina, na forma de intervalo de números reais, o contradomínio da função g.

12.2. O ponto A pertence ao gráfico de g, tem ordenada 2 e a abcissa pertence ao intervalo $\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$.
Qual é o valor da abcissa do ponto A, arredondada às centésimas?
Indica a opção correta.

(A) 3,34 (B) 3,47 (C) 3,53 (D) 3,28

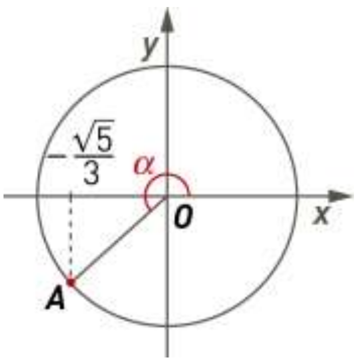
13. Determina o valor exato de:

$$\sin\left(\frac{13\pi}{6}\right) - 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$$

14. Na figura está representado na circunferência trigonométrica um ângulo de amplitude α do 3.º quadrante.

Sabe-se que a abcissa do ponto A é $-\frac{\sqrt{5}}{3}$.

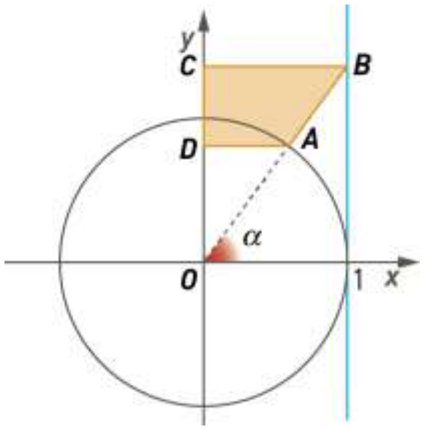
Qual é o valor de $\tan(\alpha)$?
Indica a opção correta.



(A) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (B) $\frac{4}{5}$

(C) $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ (D) $-\frac{3}{\sqrt{5}}$

15. Na figura está representado, num referencial o.n. *xOy*, a circunferência trigonométrica.
O ponto *A* pertence à circunferência e α é a amplitude, em radianos, do ângulo orientado que tem por lado origem o semieixo positivo *Ox* e lado extremidade a semirreta $\dot{O}A$ $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$.



A semirreta $\dot{O}A$ interseta a reta $x = 1$ no ponto *B*.
O quadrilátero [*ABCD*] é um trapézio retângulo em que os vértices *C* e *D* pertencem a *Oy*.

15.1. Para uma posição do ponto *A*, tem-se $\overline{BC} - \overline{AD} = \frac{1}{2}$.

Determina o valor de α para essa posição de *A*.

15.2. Sabe-se que $\overline{OD} = \frac{3}{4}$, para uma posição do ponto *A*.

Mostra, nesse caso, que $\overline{OC} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$.

15.3. Mostra que a área do trapézio, em função de α, é dada por $\frac{\sin^3 \alpha}{2\cos \alpha}$

FIM