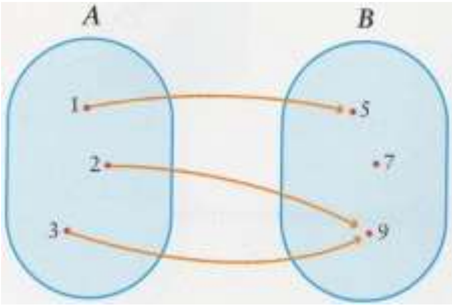
FICHA DE TRABALHO N.º 6 (Generalidades sobre Funções)	TURMAS:10.ºA/10.ºB	2019/2020

Generalidades sobre Funções

Conceito de Função

Sejam A e B dois conjuntos. Damos o nome de função (ou aplicação) de A em B a uma correspondência que a cada elemento de A associa um e um só elemento de B.

Por exemplo, a correspondência ao lado é uma função, pois a cada elemento de A (ou **objeto**) corresponde um e um só elemento de B (ou **imagem)**.



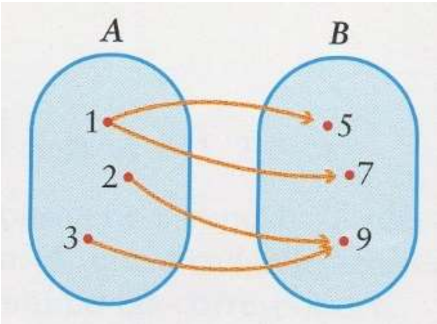
Nesta função, dizemos que:

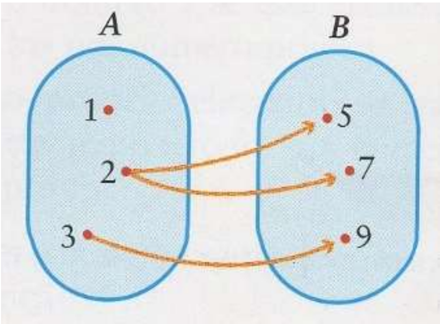
. o objeto 1 tem imagem 5
. os objetos 2 e 3 têm imagem 9

Dizemos também que:

. A é o **domínio** (conjunto dos objetos)
. B é o **conjunto de chegada**
. {5, 9} é o **contradomínio** (conjunto das imagens)

Exercício 1
Explica porque as seguintes correspondências não são funções de A em B

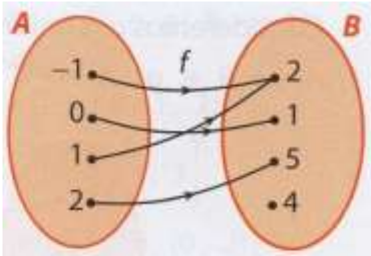




Exercício 2
Indica, justificando, se é necessariamente uma função a relação que:
2.1. a cada mãe faz corresponder o(s) seu(s) filho(s);
2.2. a cada pessoa faz corresponder o seu número de identificação nacional;
2.3. ao comprimento do lado de um quadrado faz corresponder o seu perímetro;
2.4. ao tempo despendido numa viagem faz corresponder a distância percorrida;
2.5. à hora de entrada de um aluno na escola faz corresponder o dia da semana;
2.6. numa escola, a cada número de aluno de uma turma faz corresponder o respetivo aluno.

Formas de representação de uma função

Consideremos a função $f: A \to B$ definida **pelo diagrama de setas** representado na figura ao lado.



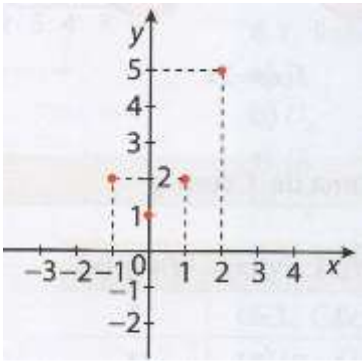
Esta função pode ser representada, ainda:

. pelo gráfico

O gráfico de uma função $f: A \to B$ é o conjunto de pares ordenados (x, y), onde x pertence a A e y pertence a B, sendo $y = f(x)$.
O gráfico denota-se por G_f.

Assim: $G_f = \{(-1,2),(0,1),(1,2),(2,5)\}$

. pelo gráfico cartesiano



. pela tabela

x	−1	0	1	2
y	2	1	2	5

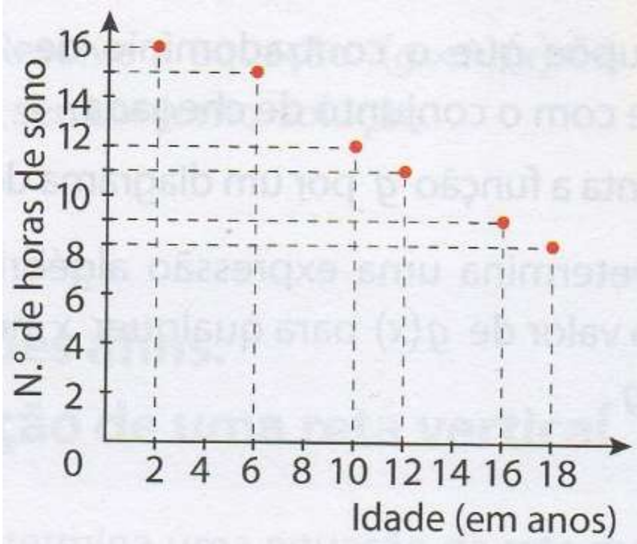
. pela expressão algébrica

Neste exemplo podia ser $f(x) = x^2 + 1$ com o $D_f = \{-1, 0, 1, 2\}$

Nota:
Nas diferentes formas de definir uma função tem que ser sempre conhecido o domínio, o conjunto de chegada e a correspondência entre os elementos do domínio e os elementos do conjunto de chegada.

Exercício 3

Na figura seguinte está representada uma correspondência entre a idade, em anos, e o respetivo número de horas de sono.



3.1. De acordo com o gráfico cartesiano, indica:

3.1.1. o número de horas que deve dormir o João que tem 12 anos;

3.1.2. a idade da Joana, sabendo que precisa de dormir 9 horas.

3.2. Justifica que se trata de uma função.

3.3. Indica o domínio, o contradomínio, a variável independente e a variável dependente.

3.4. Qual é a imagem de 6 ?

3.5. Qual é o objeto que tem por imagem 12 ?

3.6. Designando por f a função representada, completa:

3.6.1. f(2) = …… 3.6.2. f(…..) = 9

Exercício 4

Considera o gráfico de uma função g definida por $G_g = \{(1,3),(2,6),(3,9),(4,12)\}$

4.1. Identifica o domínio e o contradomínio de g

4.2. Representa a função g num diagrama de setas supondo que o contradomínio coincide com o conjunto de chegada.

4.3. Supõe que o contradomínio de g não coincide com o conjunto de chegada. Representa a função g por um diagrama de setas.

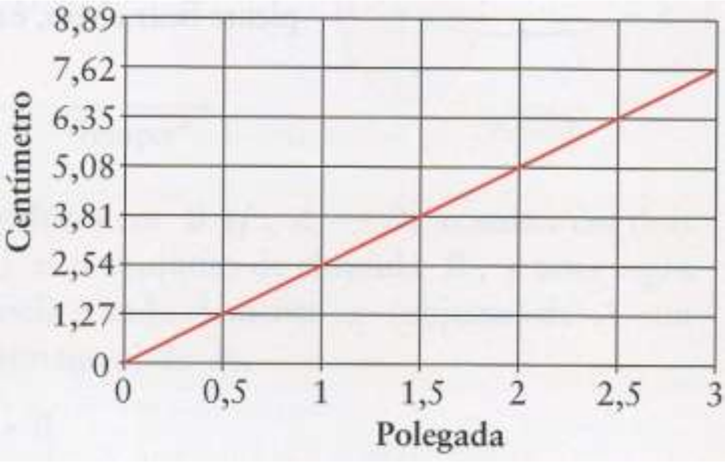
4.4. Determina uma expressão algébrica que defina o valor de g(x) para qualquer x no domínio de g.

Leitura e interpretação de gráficos cartesianos associados a uma função

Exercício 5

Por vezes, o comprimento da diagonal do ecrã de um televisor é indicado em polegadas.

No gráfico cartesiano apresentado na figura ao lado, pode ver a relação aproximada existente entre esta unidade de comprimento e o centímetro.



5.1. Uma polegada a quantos centímetros corresponde? Apresenta o resultado arredondado às centésimas.

5.2. A quantas polegadas correspondem 60 cm?

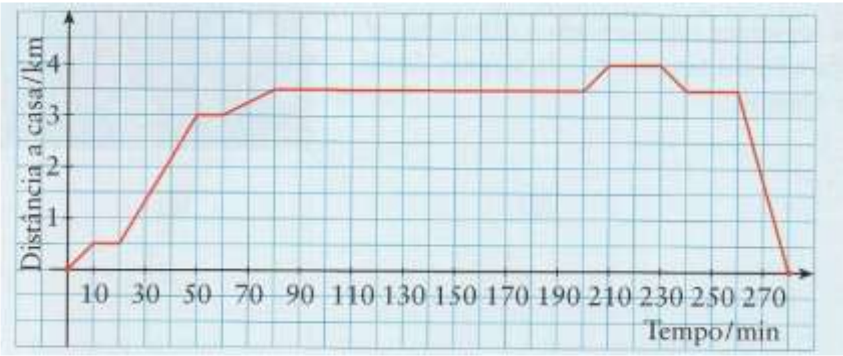
5.3. A quantos centímetros correspondem 15 polegadas?

5.4. Qual das quatro igualdades que se seguem permite calcular a diagonal do ecrã de um televisor, em centímetros (c), dado o seu comprimento em polegadas (p)?

(A) $c = 1,27p$ (B) $c = 2,54p$ (C) $c = \frac{1}{1,27}p$ (D) $c = \frac{1}{2,54}p$

Exercício 6

O gráfico cartesiano mostra a relação entre o tempo t, em minutos, gasto no percurso da viagem do João e a distância d, em quilómetros, a sua casa.



O João saiu de casa, esperou pelo autocarro, saiu do autocarro e foi tomar café; em seguida, foi para a universidade. Quando saiu das aulas dirigiu-se a um centro comercial onde foi fazer compras. Depois de ter feito as compras dirigiu-se para a paragem do autocarro e esperou de novo por este, que o levou até casa.

6.1. Qual é a distância da casa do João à universidade?

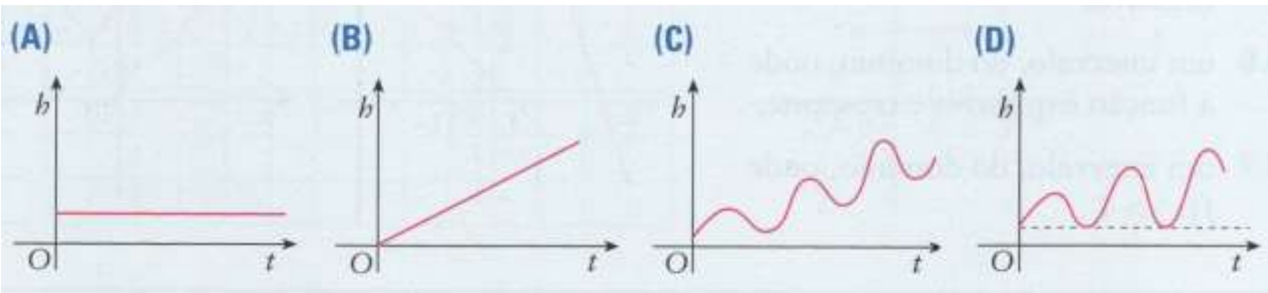
6.2. Quantos metros percorreu o João a pé?

6.3. Quanto tempo esperou o João pelos autocarros?

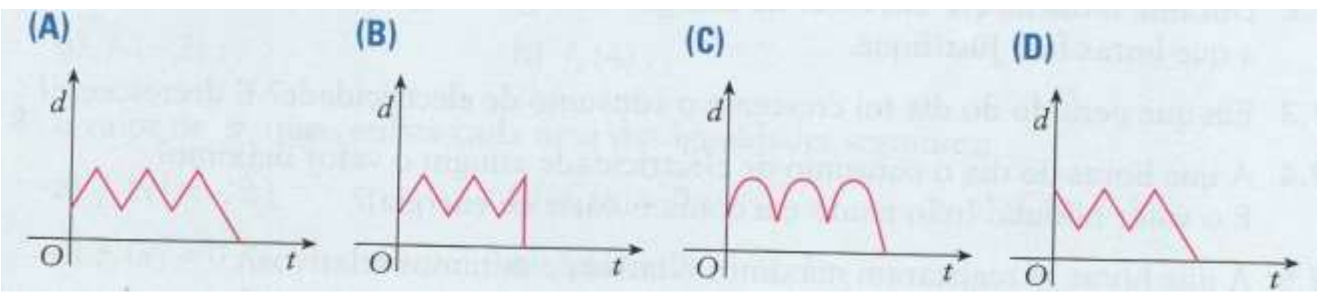
6.4. Sabendo que o João entrou no centro comercial às 11h40 min, diz a que horas chegou à universidade.

6.5. Nas duas viagens de autocarro, o João andou a velocidades médias diferentes. Calcula cada uma dessas velocidades e compare-as.

Exercício 7
A Ana estava sentada no baloiço. A mãe deu-lhe uma ajuda, no início, e depois a Ana tentou chegar o mais alto possível.
Dos gráficos seguintes apenas um deles pode representar a distância, h, da Ana ao solo, em função do tempo, t, enquanto a Ana anda de baloiço.
Numa pequena composição, explica por que é que os outros três gráficos estão incorretos, apresentando, para cada um deles, uma razão pela qual o rejeita.



Exercício 8
A bandeira de uma dada instituição é hasteada por um sistema elétrico, subindo e descendo a uma velocidade constante.
O sistema avariou e a bandeira subiu e desceu três vezes acontecendo que à terceira descida o fio quebrou e a bandeira caiu ao chão.
Dos gráficos seguintes apenas um deles pode representar a distância, d, da bandeira ao solo em função do tempo, t, enquanto o sistema esteve avariado.
Numa pequena composição, explica por que é que os outros três gráficos estão incorretos, apresentando, para cada um deles, uma razão pela qual o rejeita.



Lógica Matemática

Quantificador universal

A expressão "qualquer que seja" representa-se pelo símbolo $\forall$.

Dada uma condição p(x), a proposição $\forall x, p(x)$ é verdadeira quando e apenas quando se obtém uma proposição verdadeira sempre que se substituiu x em p(x) por um objeto qualquer do universo da condição.

Quantificador existencial

A expressão "existe pelo menos um" representa-se pelo símbolo $\exists$.

Dada uma condição p(x), a proposição $\exists x : p(x)$ é verdadeira quando e apenas quando para, pelo menos, um objeto a do universo da condição, p(a) for verdadeira.

Implicação de condições

Quando se tem $\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$, diz-se que:
. p(x) é condição suficiente para que se verifique q(x)
. q(x) é condição necessária para que se verifique p(x)

Exemplo:

x é português $\Rightarrow$ x é europeu

Ser português é condição suficiente para ser europeu.
É necessário ser europeu para ser português.

Em conjuntos, se $\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$ então podemos afirmar que $P \subset Q$

Equivalência de condições

Quando se tem $\forall x, p(x) \Leftrightarrow q(x)$, a condição p(x) diz-se necessária e suficiente para que se verifique q(x).

Exemplo:

X é triângulo equilátero $\Leftrightarrow$ x é um triângulo com os ângulos iguais

Em conjuntos, se $\forall x, p(x) \Leftrightarrow q(x)$ então podemos afirmar que $P = Q$

Restrição de uma função

Dados os conjuntos A e B, uma função $f: A \to B$ e um conjunto C, a restrição de f a C é a função $f|_C: C \cap A \to B$, tal que: $\forall x \in C \cap A, f|_C(x) = f(x)$.

Exemplo:

Considera o gráfico de função f

$G_f = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6)\}$

O gráfico de uma restrição da função f é por exemplo:

$G_{f|_C} = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$

Exercício 9

Considera os conjuntos: $A = \{Abel, Berta, Carlos, Dulce, Eva\}$ e $B = \{1,2,3,4,5,6\}$

Seja $f: A \to B$ a função que faz corresponder a cada nome o seu número de letras.

9.1. Constrói um diagrama de setas que defina a função *f*.

9.2. Considera o conjunto: $C = \{Abel, Berta, Célia, Daniel, Eva, Flávio\}$

9.2.1. Indica o domínio e o contradomínio da função $f|_C$

9.2.2. Constrói um diagrama de setas que defina a função $f|_C$

Exercício 10

Considera os conjuntos: $H = \{2,4,6,8,10\}$ *e* $I = \{2,3,6,7,12,15,18\}$

Seja $g: H \to I$ a função que faz corresponder a cada elemento de H a soma dos seus divisores.

10.1. Define a função g por meio de uma tabela.

10.2. Seja $J = \{2,6,10\}$ e seja $g|_J$ a restrição da função g ao conjunto J.

10.2.1. Indica o domínio, o contradomínio e o conjunto de chegada da função $g|_J$

10.2.2. Define a função $g|_J$ por meio do seu gráfico.

Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas

Função injetiva
Uma função diz-se injetiva se objetos diferentes tiverem sempre imagens diferentes, isto é: $f: A \to B$ *é injetiva se e só se* $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Função sobrejetiva
Uma função diz-se sobrejetiva se o contradomínio coincidir com o conjunto de chegada, isto é: $f: A \to B$ *é sobrejetiva se e só se* $\forall y \in B, \exists x \in A: y = f(x)$

Função bijetiva
Uma função diz-se bijetiva se for simultaneamente injetiva e sobrejetiva.

Exemplo:

. A função $f(x) = x^2$ é não injetiva e não sobrejetiva
. A função $f(x) = 2x$ é injetiva e sobrejetiva

Exercício 11
Considera o conjunto $A = \{-2, -1, 0, 1, 3\}$
Sejam f e g as funções de A em Z (conjunto dos números inteiros) assim definidas:

$f(x) = |x|$ e $g(x) = x^3$

11.1. Elabora uma tabela para cada função

11.2. Estuda as funções f e g quanto à injetividade.

Exercício 12
Considera os conjuntos: $A = \{-2, 0, 1, 2\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3\}$

Seja $f: A \to B$ tal que $f(x) = |x - 1|$

12.1. Constrói uma tabela para a função f.

12.2. A função f é sobrejetiva? Justifica a tua resposta.

Exercício 13
Considera os conjuntos $A = \{a, e, i, o, u\}$ *e* $B = \{1, 2, 3, 4\}$

Seja $f: A \to B$ a função definida por:

x	a	e	i	o	u
f(x)	3	4	2	3	1

A função f é bijetiva? Justifica a tua resposta.