Teoremas de comparação e enquadramento de sucessões

Teorema 1

Sejam (u_n) e (v_n) sucessões convergentes.

Se a partir de certa ordem $u_n \leq v_n$, então: $\lim u_n \leq \lim v_n$.

Teorema 2

Dadas as sucessões (u_n) e (v_n), se $\lim u_n = +\infty$ e, a partir de uma certa ordem, $u_n \leq v_n$, então: $\lim v_n = +\infty$.

Teorema 3

Dadas as sucessões (u_n) e (v_n), se $\lim v_n = -\infty$ e, a partir de uma certa ordem, $u_n \leq v_n$, então: $\lim u_n = -\infty$.

Teorema 4 (Teorema das Sucessões Enquadradas)

Se (u_n) e (v_n) são sucessões convergentes com o mesmo limite a e se, a partir de certa ordem, a sucessão (w_n) é tal que $u_n \leq w_n \leq v_n$, então: $\lim w_n = a$.

Teoremas de comparação e enquadramento de funções

Teorema 5

Sejam f e g duas funções reais de variável real de domínio D e a$\in$ IR um ponto aderente a D.

Se para todo o x$\in$ D, $f(x) \geq g(x)$ e $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$, então: $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Nota: Este teorema é válido nos casos em que $x \to \pm\infty, x \to a^- \, e \, x \to a^+$

Teorema 6

Sejam f e g duas funções reais de variável real de domínio D e a$\in$ IR um ponto aderente a D.

Se para todo o x$\in$ D, $f(x) \geq g(x)$ e $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, então: $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$.

Nota: Este teorema é válido nos casos em que $x \to \pm\infty, x \to a^- \, e \, x \to a^+$

Teorema 7

Sejam f, g e h funções reais de variável real de domínio D e a$\in$ IR um ponto aderente a D.

Se $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = b$ com b$\in$ IR e se, para todo o x$\in$ D, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, então: $\lim_{x \to a} f(x) = b.$

Nota: Este teorema é válido nos casos em que $x \to \pm\infty, x \to a^- \, e \, x \to a^+$

Teorema 8 (Teorema de Bolzano – Cauchy)

Seja f uma função real de variável real contínua num intervalo [a, b] $\subset D_f$.

Então, para qualquer k $\in$ IR do intervalo aberto de extremos f(a) e f(b), existe pelo menos um número $c \in]a,b[$, tal que f(c) = k

Corolário do Teorema de Bolzano – Cauchy

Seja f uma função real de variável real contínua num intervalo [a, b] $\subset D_f$.

Se f(a)$\times$ f(b) < 0 (f(a) e f(b) têm sinais contrários), então existe pelo menos um valor $c \in]a,b[$, tal que f(c) = 0.

Teorema 9 (Teorema de Weierstrass)

Sendo f uma função real de variável real contínua num intervalo [a, b], f admite um máximo e um mínimo absolutos.