FICHA DE TRABALHO N.º 5 Limites de Sucessões; Limites de Funções; Teorema de Bolzano-Cauchy; Teorema de Weierstrass	TURMA:12.ºA	2019/2020

1. Sejam (u_n) e (v_n) sucessões convergentes. Sabe-se que: a partir de certa ordem $v_n - u_n \leq 0$ e que $lim u_n = \frac{1}{2}$
Qual dos seguintes valores pode ser igual a $lim v_n$?

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) 2

2. Considera as sucessões (u_n) e (v_n) tais que:
$lim u_n = +\infty$ e $v_n \leq 5 - u_n$,para $n \geq 10$
Indica, justificando, qual é o limite de v_n.

3. Mostra que a sucessão de termo geral $u_n = n^4(\sin(n) - 5)$ tende para $-\infty$

4. Utiliza o teorema das sucessões enquadradas para determinar o limite de cada uma das sucessões cujo termo geral se indica:

4.1. $u_n = \frac{cos^2(n\alpha)}{2n+1}, \alpha \in IR$

4.2. $\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

5. Sejam f e g as funções reais de variável real $f(x) = \frac{x^2}{x + \sin x}$ e $g(x) = \frac{x^2}{x+1}$

5.1. Mostra que: $\forall x \in]1, +\infty[, f(x) \geq g(x)$

5.2. Determina $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

6. Considera a função f definida por $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

6.1. Determina o domínio D de f.

6.2. Mostra que $\forall x \in D \setminus \{0\}$, se tem $0 < f(x) < \frac{1}{\sqrt{x}}$

6.3. Determina $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

7. Considera a função f definida por $f(x) = \frac{2x + \sin x}{5x}$

Determina $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

8. Considera a função $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x^2-4x+3}$ e que $\forall x \in IR^+, h(x) > f(x)$

Qual pode ser o $\lim\limits_{x\to 3} h(x)$?

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) $-\infty$

9. Considera uma função f de domínio [1, 2].
Sabe-se que:
. f é contínua em todo o seu domínio;
. $\forall x \in [1,2], f(x) < 0$
. $f(1) = 3f(2)$
Considera uma função g de domínio [1, 2] e definida por: $g(x) = 2f(x) - f(1)$
Prova que a função g tem pelo menos um zero.

10. Seja a>0 e acerca de uma certa função f sabe-se que:
. D_f = [-a, a]
. f é contínua em todo o seu domínio
. f(-a)=f(a)
. f(a)> f(0)
Mostra que a condição f(x) = f(x+a) tem, pelo menos, uma solução em]-a, 0[

11. De uma função g de domínio IR, sabe-se que:
. contínua em IR
. 1 é zero de g
. g(3)>0

Prova que a equação $g(x) = \frac{g(3)}{2}$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo]1, 3[.

12. Relativamente a uma função g sabe-se que:
. g é contínua em [a, b];
. g(a) = 1 - k
. g(b) = k , $k \in IR$
Determina para que valores de k é possível garantir que a função g te pelo menos um zero pertencente a]a, b[.

13. Considera a função g, de domínio IR, definida por: $g(x)=\begin{cases} x^2-3x+1 & , se\ x \leq 1 \\ \dfrac{2-3x}{x} & , se\ x>1 \end{cases}$

Mostra que a função g tem um máximo e um mínimo absoluto no intervalo [-1,2].

FIM

Soluções:

1. C; 2. $-\infty$; 4.1. 0; 4.2. 2 ; 5.2. $+\infty$; 6.1. $]0,+\infty[$; 6.3. 0; 7. $\frac{2}{5}$; 8. A

12. $k \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$