ÁLGEBRA - RADICAIS E POTÊNCIAS DE EXPOENTE FRACIONÁRIO

PROPRIEDADE 1 (MONOTONIA DA ADIÇÃO)

Sejam a, b e c números reais. Se a < b, então a + c < b +c

PROPRIEDADE 2 (MONOTONIA DA MULTIPLICAÇÃO)

Sejam a, b e c números reais.

2.A. Se c > 0 tem-se: se a < b, então $a \times c < b \times c$

2.B. Se c < 0 tem-se: se a < b, então $a \times c > b \times c$

MONOTONIA DA POTENCIAÇÃO

» Potências de expoente n

Dados dois números reais a e b e um número natural n:

- Se $a<b$ e n ímpar, então $a^n<b^n$. **Exemplo:** $-3<-2 \Leftrightarrow (-3)^5<(-2)^5$
- Se $0\leqslant a<b$ e n par, então $0\leqslant a^n<b^n$. **Exemplo:** $2<3 \Leftrightarrow 2^2<3^2$
- Se $a<b\leqslant 0$ e n par, então $a^n>b^n\geqslant 0$. **Exemplo:** $-3<-2 \Leftrightarrow (-3)^4>(-2)^4$

» Raiz índice n de a

Dado um número real a e um número natural n:

- Se n ímpar, existe um único número real b tal que $b^n=a$.
- Se n par e a é positivo, existe um único número real positivo b tal que $b^n=a$.
- O número b designa-se por **raiz índice n de a** e representa-se por $b=\sqrt[n]{a}$.
- Zero é o único número real cuja potência de expoente n é igual a zero, ou seja, $b^n=0 \Leftrightarrow b=0$. Assim, $\sqrt[n]{0}=0$.

$x^n = a$		
	n é par	**n é ímpar**
a > 0	Duas e só duas soluções b e -b	Uma e uma só solução b
a = 0	Uma solução: 0	Uma solução: 0
a < 0	Não tem soluções	Uma e uma só solução b

» Propriedades algébricas dos radicais

Radicais equivalentes: Se multiplicarmos o índice do radical e o expoente do radicando pelo mesmo número natural, obtém-se um radical equivalente.

$$\sqrt[n]{a^p}=\sqrt[nk]{a^{pk}}\ ;\ n\ ,\ p\ ,\ k\in\mathbb{N}\ ,\ n>1\ \text{e}\ a>0$$

Exemplos:

- $\sqrt[8]{5^6}=\sqrt[8:2]{5^{6:2}}=\sqrt[4]{5^3}$
- $\sqrt{5}=\sqrt[2\times3]{5^3}=\sqrt[6]{5^3}=\sqrt[6]{125}$

Operações com radicais

Produto e quociente de radicais com o mesmo índice • $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\times b}$, $n\in\mathbb{N}$, desde que $\sqrt[n]{a}$ e $\sqrt[n]{b}$ estejam definidos. • $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, $n\in\mathbb{N}$ e $b\neq0$	**Exemplos:** • $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{2\times5}=\sqrt[3]{10}$ • $\sqrt{3}\ :\ \sqrt{5}=\sqrt{\dfrac{3}{5}}$
Potência de um radical $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p=\sqrt[n]{a^p}$, $n\in\mathbb{N}$, desde que $\sqrt[n]{a}$ esteja definido. **Nota:** Se $n=p$, $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=\sqrt[n]{a^n}=a$.	**Exemplo:** $\left(\sqrt[3]{5}\right)^2=\sqrt[3]{5^2}$
Radical de um radical $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}=\sqrt[np]{a}$; n , $p\in\mathbb{N}$, desde que $\sqrt[n]{a}$ esteja bem definido.	**Exemplo:** $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}=\sqrt[3\times4]{2}=\sqrt[12]{2}$

Racionalização de denominadores

$\dfrac{a}{\sqrt[n]{p}}=\dfrac{a\sqrt[n]{b^{n-p}}}{\sqrt[n]{b^p}\times\sqrt[n]{b^{n-p}}}$	**Exemplo:** $\dfrac{3}{\sqrt[3]{5}}=\dfrac{3\times\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{5^2}}=\dfrac{3\sqrt[3]{5^2}}{5}$
$\dfrac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\dfrac{a\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}{\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}=\dfrac{a\sqrt{b}-a\sqrt{c}}{b-c}$	**Exemplo:** $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}=$ $=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2-3}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{-1}$
$\dfrac{a}{\sqrt[n]{b}-\sqrt[n]{c}}$ aplica-se: $A^n-B^n=(A-B)\,(A^{n-1}+A^{n-2}B+A^{n-3}B^2+\ldots+AB^{n-2}+B^{n-1})$	**Exemplo:** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}=\dfrac{\left(\sqrt[3]{3}\right)^2+\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{2}+\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}{3-2}=$ $=\dfrac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{1}$

»Potências de expoente racional

Potência de expoente $\frac{1}{n}$ Seja $a \geqslant 0$, $q \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ tal que $q = \frac{1}{n}$, então $a^q = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.	**Exemplo:** $3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}$
Potências de expoente fracionário Seja $a \geqslant 0$, $q \in \mathbb{Q}^+$, $m \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ tal que $q = \frac{m}{n}$, então $a^p = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.	**Exemplo:** $3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2}$
Potências de expoente racional negativo Seja $a > 0$ e $q \in \mathbb{Q}^+$, $a^{-q} = \frac{1}{a^q}$.	**Exemplo:** $2^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{4}}}$

Propriedades das potências de expoente racional

- Sejam a um número positivo e q e p dois números racionais: $a^p \times a^q = a^{p+q}$ e $a^p : a^q = a^{p-q}$
- Sejam a e b dois números e p um número racional: $a^p \times b^p = (a \times b)^p$ e $a^p : b^p = (a : b)^p$
- Sejam p e q $\in \mathbb{Q}_0^+$ e $a > 0$: $(a^p)^q = a^{p \times q}$