Tema 1 – Lógica e Teoria dos Conjuntos

1. Proposições e valores lógicos

. Um termo ou designação é uma expressão que nomeia ou designa um ente.

. Uma proposição é toda a expressão p susceptível de ser verdadeira ou falsa.

. O universo dos valores lógicos é {V, F} correspondente a verdade ou falsidade.

. Duas proposições p e q dizem-se equivalentes quando e apenas quando p e q têm o mesmo valor lógico e escreve-se: $p \Leftrightarrow q$

. Uma tautologia é uma proposição que é verdadeira, independentemente dos valores lógicos das proposições elementares que a constituem.

. Uma contradição é uma proposição que é falsa, independentemente dos valores lógicos das proposições elementares que a constituem.

2. Operações lógicas sobre proposições

Proposições		Negação	Conjunção	Disjunção	Implicação	Equivalência
p	q	$\sim p$ (lê-se não p)	$p \wedge q$ (lê-se p e q)	$p \vee q$ (lê-se p ou q)	$p \Rightarrow q$ (lê-se p implica q)	$p \Leftrightarrow q$ (lê-se p é equivalente a q)
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Propriedades das operações lógicas

Princípio de não contradição

Uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa. Dada uma proposição p, $p \wedge \sim p$ é uma proposição falsa.

Lei da dupla negação

Dada uma proposição p, $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$

Princípio do terceiro excluído

Uma proposição é verdadeira ou a sua negação é verdadeira. Dada uma proposição p, $p \vee \sim p$ é uma proposição verdadeira

Propriedades da conjunção e disjunção.

Dadas as proposições p, q e r:

. propriedade comutativa: $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p \quad e \quad p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

. propriedade associativa : $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r) \quad e \quad (p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

. propriedade distributiva da conjunção em relação à disjunção:

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

. propriedade distributiva da disjunção em relação à conjunção:

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

. elemento neutro da conjunção: $p \wedge V \Leftrightarrow p$

. elemento neutro da disjunção: $p \vee F \Leftrightarrow p$

. elemento absorvente da conjunção: $p \wedge F \Leftrightarrow F$

. elemento absorvente da disjunção: $p \vee V \Leftrightarrow V$

. idempotência da conjunção: $p \wedge p \Leftrightarrow p$

. idempotência da disjunção: $p \vee p \Leftrightarrow p$

. Primeiras Leis de De Morgan:

$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ $\qquad\qquad$ $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

Propriedades da implicação.

Dadas as proposições p, q e r:

. Relação da implicação com a disjunção: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$

. Negação da implicação: $\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$

. Princípio da dupla implicação: $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$

. Implicação contrarrecíproca (Lei da conversão): $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

Observação:

Em qualquer sequência de operações lógicas, a menos que se utilizem parênteses, devem respeitar-se as seguintes prioridades: primeiro negação, seguindo-se as conjunções e as disjunções pela ordem que aparecem e, por fim, implicações e equivalências pela ordem que aparecem.

Nota:

Dada a implicação $a \Longrightarrow b$, diz-se que:

. $b \Longrightarrow a$ é a implicação recíproca

. $\sim a \Longrightarrow \sim b$ é a implicação contrária

. $\sim b \Longrightarrow \sim a$ é a implicação contrarrecíproca

3. Condições e conjuntos

. Uma expressão designatória é uma expressão p(x) envolvendo uma variável x tal que, substituindo x por um objeto a, se obtém uma designação p(a).

. Uma expressão proposicional ou condição é uma expressão p(x) envolvendo uma variável x, tal que, substituindo x por um objeto a, se obtém uma proposição p(a).

. Domínio é o conjunto de valores que uma variável de uma expressão designatória ou de uma condição toma.

. Quantificador universal: $\forall$ (lê-se “para todo/todos”)

A proposição $\forall x, p(x)$ é verdadeira quando e apenas quando se obtém uma proposição verdadeira para todos os valores de x.

. Quantificador existencial: $\exists$(lê-se “existe pelo menos um”)

Dada uma condição p(x), a proposição $\exists x: p(x)$ é verdadeira quando e apenas quando se obtém uma proposição verdadeira para pelo menos um valor de x.

Classificação de condições

A condição p(x) é universal se e só se a proposição $\forall x, p(x)$ é verdadeira.

A condição p(x) é possível se e só se $\exists x: p(x)$ é verdadeira.

Se uma condição não é possível, então diz-se **impossível**.

Propriedades

Sejam c(x) uma condição qualquer, u(x) uma condição universal e i(x) uma condição impossível:

$c(x) \vee u(x) \Leftrightarrow u(x)$

$c(x) \vee i(x) \Leftrightarrow c(x)$

$c(x) \wedge u(x) \Leftrightarrow c(x)$

$c(x) \wedge i(x) \Leftrightarrow i(x)$

Segundas Leis de De Morgan

Para uma condição c(x):

$\sim [\forall\, x\,, p(x)] \iff \exists\, x\,:\, \sim p(x)$

$\sim [\exists\, x\,:\, p(x)] \iff \forall\, x\,, \sim p(x)$

Classificação de condições num conjunto U

. Dada uma condição p(x) e um conjunto U, $\forall\, x\,, p(x) \iff \forall\, x,\ x \in U \Rightarrow p(x)$.

Se a proposição $\forall\, x \in U\,,\ p(x)$ for verdadeira, p(x) designa-se por **condição universal em U**.

. Dada uma condição p(x) e um conjunto U, $\exists\, x\ \in U{:}\, p(x) \Leftrightarrow \exists x : x \in U \wedge\ p(x)$.

Se a proposição $\exists\, x\ \in U{:}\, p(x)$ for verdadeira, p(x) designa-se por **condição possível em U** e, caso contrário, por **condição impossível em U**.

Negação de uma condição

A negação de uma condição universal é uma condição impossível.

A negação de uma condição impossível é uma condição universal.

Dada uma condição p(x) e um conjunto U:

$\sim [\forall\, x \in U\,, p(x)] \iff \exists\, x \in U{:} \sim p(x)$

$\sim [\exists\, x\ \in U{:}\, p(x)] \iff \forall\, x \in U\,, \sim p(x)$

Negação de uma implicação:

Dadas as condições p(x) e q(x): $\sim\!\big(\forall x\,, p(x)\ \Rightarrow q(x)\big) \Leftrightarrow \exists x : p(x) \wedge\!\sim q(x)$

Conceito de condição suficiente e condição necessária

Estar a chover $\Rightarrow$ Haver nuvens

(condição suficiente) (condição necessária)

Conjuntos e condições

. **Igualdade de conjuntos:** Dados dois conjuntos A e B diz-se A = B se e somente se $\forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

. Dada uma condição p(x) e um conjunto U, $\{x \in U : p(x)\} \Leftrightarrow \{x : x \in U \wedge p(x)\}$ designa-se por conjunto-solução de p(x) em U.

. **Reunião (ou união) de conjuntos**: Dados os conjuntos A e B, o conjunto-reunião (ou união) de A e B representa-se por $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$.

. **Interseção de conjuntos:** Dados os conjuntos A e B, o conjunto-interseção de A e B representa-se por $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$.

Condição	a(x)	b(x)	a(x) ∨ b(x)	a(x) ∧ b(x)
Conjunto-solução	A	B	A ∪ B	A ∩ B

. **Inclusão de conjuntos:** Dados os conjuntos A e B, diz-se que A está contido em B quando $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$ e representa-se por $A \subset B$. Neste caso, A é um subconjunto de B ou uma parte de B.

. **Diferença entre conjuntos:** Dados os conjuntos A e B designa-se por diferença entre A e B o conjunto $\{x : x \in A \wedge x \notin B\}$ e representa-se por A\B.

Se B $\subset A$, então A\B = $\bar{B}$ onde $\bar{B}$ se designa por complementar de B em A

Condição	a(x)	b(x)	~a(x)	a(x) ∧~ b(x)
Conjunto-solução	A	B	$\bar{A}$	A ∩ $\bar{B}$ =A\B

Princípio da dupla inclusão: Dados os conjuntos A e B, diz-se que A = B se e somente se $A \subset B$ e $B \subset A$.

Condição	a(x)	b(x)	a(x) ⇒ b(x)	b(x) ⇒ a(x)	a(x) ⇔ b(x)
Conjunto-solução	A	B	A ⊂ B	B ⊂ A	A = B

Demonstração de equivalências por dupla inclusão

Dadas as condições p(x) e q(x),

$\forall x, p(x) \Leftrightarrow q(x)\ é\ equivalente\ a\ \forall x, (p(x) \Rightarrow q(x) \wedge q(x) \Longrightarrow p(x))$

<u>Exemplo:</u>

Queremos mostrar que: $\forall x \in IR,\ x^2 > 4 \Leftrightarrow x > 2 \vee x < -2$, que é equivalente mostrar que $(x^2 > 4 \Longrightarrow x > 2 \vee x < -2)$ e $(x > 2 \vee x < -2 \Longrightarrow x^2 > 4)$

1.ª parte:

$x^2 - 4 > 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) > 0 \Rightarrow (x-2>0 \wedge x+2>0) \vee (x-2<0 \wedge x+2<0)$

$\Rightarrow (x>2 \wedge x>-2) \vee (x<2 \wedge x<-2) \Rightarrow x>2 \vee x<-2$

2.ª parte:

$x>2 \vee x<-2 \Rightarrow |x|>2 \Rightarrow x^2>4$

Da dupla implicação resulta a equivalência.

. Relações entre operações lógicas com condições e operações com os conjuntos que definem:

$A \cap U = A \quad ; \quad A \cap \emptyset = \emptyset$

$A \cup U = U \quad ; \quad A \cup \emptyset = A$

$\bar{\bar{A}} = A$

Primeiras Leis de De Morgan: $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad ; \quad \overline{A\, U\, B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

Negação de uma implicação universal

Dadas as condições p(x) e q(x) a negação da proposição $\forall\, x,\ p(x) \Rightarrow q(x)$ é equivalente à proposição $\exists\, x : p(x) \wedge \sim q(x)$, isto é, a proposição $\forall\, x,\ p(x) \Rightarrow q(x)$ é falsa se, e somente se, existir a tal que p(a) é verdadeira e q(a) é falsa.

Exemplo:

A proposição "Qualquer número primo é impar" é falsa pois a sua negação é equivalente "Existe um número primo que não é ímpar", que é verdadeira.

De facto, existe um número que é primo e não é ímpar, o número 2.

Demonstração por contrarrecíproco

Dadas as condições p(x) e q(x), a proposição $\forall\, x,\ p(x) \Rightarrow q(x)$ é equivalente a $\forall\, x,\ \sim q(x) \Rightarrow \sim p(x)$.

Exemplo:

Queremos mostrar que a proposição $\forall\, x \in IR, x^2 < 1 \Rightarrow x < 1$

Vamos utilizar o contrarrecíproco, isto é, $\forall\, x \in IR,\ \sim(x<1) \Rightarrow \sim(x^2<1)$

Ou seja, $\forall\, x \ \in IR,\ x \geq 1 \Longrightarrow x^2 \geq 1$

Seja $x \geq 1,$

Se $x = 1$ então $x^2 = 1$

Se $x > 1$ então $x^2 > 1,$ pois x > 1 e x > 0 $\Longrightarrow x \times x > 1\ \times x$, ou seja, $x^2 > x$

Como x > 1, por transitividade, vem $x^2 > 1$

FIM